关注数学思想方法　把脉高考二轮复习

马恩云

在高考数学命题者眼里，数学的本质不是孤立的问题与解法，而是一整套知识理论体系与思想方法；一轮复习是构建知识网络的整套理论体系，而在二轮复习中应以思想方法为核心，使学生在归纳整理及二手结论提炼的过程中，体会蕴含在其中的思想方法。高考二轮复习阶段是高三下学期教与学的承上启下时期，是促进知识灵活运用、提高能力的重要时期，是发展学生思维水平，促进尖子生大幅度提升的关键时期。关注数学思想方法的归纳整理，是优化学生思考问题、解决问题的思维策略，提升能力水平的有效途径之一。本文就数学中的函数与方程的思想、转化与化归的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、特殊与一般的思想在高考二轮复习中的地位和导向作用，以期更好地做好高考二轮复习。

一、函数与方程的思想

函数的思想，是用运动和变化的观点，分析和研究数学中的数量关系，建立函数关系或构造函数，运用函数的图像和性质去分析问题、转化问题，从而使问题获得解决。函数思想是对函数概念的本质认识，用于指导解题就是要善于利用函数知识或函数观点观察、分析和解决问题；方程的思想是对方程概念的本质认识，用于指导解题就是要善于利用方程或方程组的观点观察处理问题，即分析数学问题中变量间的等量关系，建立方程或方程组，或者构造方程，通过解方程或方程组，或者运用方程的性质去分析、转化问题，使问题获得解决。

案例 1.设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$.

(1)求公差 d 的取值范围；

(2)指出 S_1、S_2、$S_3\cdots$，S_{12} 中哪一个最大，并说明理由.

解：(1)由 $a_3=12$ 得：$a_1=12-2d$，

$\because S_{12}=12a_1+66d=144+42d>0$，$S_{13}=13a_1+78d=156+52d<0$，

$\therefore -\frac{24}{7}<d<-3$.

(2)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{2}dn^2+(12-\frac{5}{2}d)n$，

$\because d<0$，S_n 是关于 n 的二次函数，对称轴方程为：$x=\frac{5}{2}-\frac{12}{d}$.

$\because -\frac{24}{7}<d<-3$，$\therefore 6<\frac{5}{2}-\frac{12}{d}<\frac{13}{2}$，

$\therefore$ 当 $n=6$ 时，S_n 最大.

反思：数列的通项或前 n 项和是自变量为正整数的函数，用函数的观点处理数列中的最值问题显得十分重要。

二、转化与化归的思想

转化与化归思想是指把待解决的问题通过转化归结为在已有范围内可解的问题的一种思维方式。具体地讲：转化思想方法是实现问题的规范化，模式化以便应用已知的理论、方法和技巧，达到使问题解决的目的.化归思想方法是在研究和解决有关数学问题时，采用某种手段和方法将问题通过变换使之转化，进而使问题得以解决的一种方法。

案例 2.[2014·四川卷]设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则$|PA|+|PB|$的取值范围是(　　)

A.$[\sqrt{5},2\sqrt{5}]$　　B.$[\sqrt{10},2\sqrt{5}]$

C.$[\sqrt{10},4\sqrt{5}]$　　D.$[2\sqrt{5},4\sqrt{5}]$

解：由题意可知，定点 $A(0,0)$，$B(1,3)$，且两条直线互相垂直，

则其交点 $P(x,y)$落在以 AB 为直径的圆周上，

所以$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$，即$|PA|+|PB|\geqslant|AB|=\sqrt{10}$.

又$|PA|+|PB|=\sqrt{(|PA|+|PB|)2}$

$=\sqrt{|PA|^2+2|PA||PB|+|PB|^2}$

$\leqslant\sqrt{2(|PA|^2+|PB|^2)}=2\sqrt{5}$，

所以$|PA|+|PB|\in[\sqrt{10},2\sqrt{5}]$，故选 B.

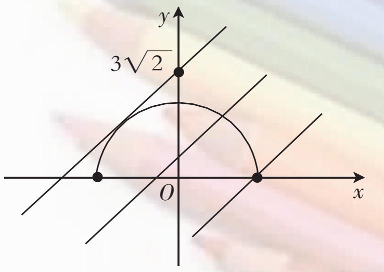
反思：转化和化归的思想方法，在运用时应注意用“变换”的方法解决数学问题，依据问题本身提供的信息，去寻求有利于解决问题的变换途径和方法，进行合理的选择。

三、数形结合思想

数学家华罗庚先生曾对数形结合的思想和方法赋诗：“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞；数缺形时少直觉，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休；切莫忘，几何代数流一体，永远联系莫分离。”数形结合是数学解题中常用的思想方法，使用数形结合的方法，很多问题能迎刃而解，且解法简捷。所谓数形结合，就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法。数形结合思想通过“以形助数，以数解形”，使复杂问题简单化，抽象问题具体化，能够变抽象思维为形象思维，有助于把握数学问题的本质，它是数学的规律与灵活性的有机结合。

案例 3. 若集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}(0<\theta<\pi)\right\}$，集合 $N=\{(x,y)|y=x+b\}$，且 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围为______.

解：$M=\{(x,y)|x^2+y^2=9,0<y\leqslant1\}$，即 M 表示以 $(0,0)$ 为圆心，以 3 为半径的圆在 x 轴上方的部分，(如图)，而 N 则表示一条直线，其斜率 $k=1$，纵截距为 b，由图形易知：欲使 $M\cap N\neq\varnothing$，即是使 $y=x+b$ 与半圆有公共点. 故填：$-3<b\leqslant3\sqrt{2}$.



反思：运用数形结合解决最值问题，关键是在平面直角坐标系中作出方程所表示的曲线，再将所求最值转化为直线在 y 轴上的截距，结合图形可解。

四、分类与整合的思想

分类与整合思想是一种重要的数学思想方法，该思想方法的基本思路是将一个较复杂的数学问题分解(或分割)成若干个基础性子问题，通过对基础性子问题的解答来实现原问题的解决。对问题实行分类与整合，其分类标准等于增加了一个已知条件，实现了有效增设，将大问题(或综合性问题)分解成小问题(或基础性子问题)，优化了解题思路，降低了问题难度。

案例 4.已知函数 $f(x)=\log_a x$ 在$[2,\pi]$上的最大值比最小值大 1，则 a 等于(　　)

A. $\frac{2}{\pi}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\frac{2}{\pi}$或$\frac{\pi}{2}$　D.不同于 A、B、C

分析：研究函数的最值需考察函数的单调性，而题中对数函数的增减性与底数 a 的取值有关，故应对 a 进行分类讨论.

解：(1)当 $a>1$ 时，$f(x)$在$[2,\pi]$上是增函数，最大值是 $f(\pi)$，最小值是 $f(2)$，据题意，$f(\pi)-f(2)=1$，即 $\log_a\pi-\log_a 2=1$，$\therefore a=\frac{\pi}{2}$

(2)当 $0<a<1$ 时，$f(x)$在$[2,\pi]$上是减函数，最大值是 $f(2)$，最小值是 $f(\pi)$，故 $f(2)-f(\pi)=1$ 即 $\log_a 2-\log_a\pi=1$，$\therefore a=\frac{2}{\pi}$. 由(1)(2)知，故选 C.

反思：题中字母 a 的取值范围的不同，直接影响了函数的性质，从而导致了两种不同的情形，所以必须对字母 a 进行分类讨论。

五、特殊与一般的思想

由特殊到一般再由一般到特殊反复认识的过程是人们认识世界的基本过程之一。数学研究也不例外，这种由特殊到一般，由一般到特殊的研究数学问题的基本认识过程就是数学研究中特殊与一般的思想。特殊与一般的思想既指出了数学的思维方向，又给出了有效的解题策略。

案例 5.已知等比数列$\{a_n\}$中 $a_2=1$，则其前 3 项的和 S_3 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$

分析：本题中的等比数列只知道 $a_2=1$，如果再知道公比，数列就可以确定，而选项是范围问题，可取定公比加以排除。

解法一：$\because$ 等比数列$\{a_n\}$中 $a_2=1$ $\therefore$ 当公比为 1 时，$a_1=a_2=a_3=1$，$S_3=3$；

当公比为-1 时，$a_1=-1$，$a_2=1$，$a_3=-1$，$S_3=-1$ 从而淘汰(A)(B)(C)，故选 D；

解法二：$\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2=1$ $\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=a_2\left(1+q+\frac{1}{q}\right)=1+q+\frac{1}{q}$

$\therefore$ 当公比 $q>0$ 时，$S_3=1+q+\frac{1}{q}\geqslant1+2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}=3$；

当公比 q<0 时，$S_3=\left(-q-\frac{1}{q}\right)\leqslant1-2\sqrt{-q\cdot\left(-\frac{1}{q}\right)}=-1$

$\therefore$ $S_3\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$　故选 D.

反思：取特殊数列入手淘汰，如果一次不能区分，则需多次取有区分度的值进行排除，直至能辨别出正确答案为止，也可多种方法并存。相比之下，取特值的方法优于通性通法；特殊与一般的思想方法是广泛适用的一种重要的数学思想方法，对于一般性问题、抽象问题、运动变化问题和不确定问题都可考虑运用特殊与一般的思想方法去探求解题途径。

总之，数学思想方法是对数学规律的理性认识，数学学习在于掌握书本知识，更在于养成良好的数学思维习惯，高考二轮复习过程中教师应在教学的每一个环节中重视数学思想方法的渗透，使学生对数学知识和所使用的方法有本质的认识，从而提高学生的解题能力；这样做就能有效避免复习备考的盲目性和随意性，在有限的备考时间内让复习效率最大化。